



## Серия №21. Поворотная гомотетия

13 июля

**Определение.** Поворотная гомотетия – композиция поворота и гомотетии с общим центром. Порядок выполнения преобразований может быть любым:  $R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$ .

- Вектор  $\overrightarrow{AB}$  переходит в вектор  $\overrightarrow{CD}$ , повернутый на угол  $\alpha$  (при  $k > 0$ ) или  $\alpha + 180^\circ$  (при  $k < 0$ ), а его длина умножается на  $|k|$ .
  - Сохраняется форма фигур: прямая переходит в прямую, окружность – в окружность, сохраняются отношения отрезков, углы, параллельность.
1. В прямоугольнике  $ABCD$  опущен перпендикуляр  $BK$  на диагональ  $AC$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AK$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что угол  $BMN$  прямой.
  2. **Лемма.** Два треугольника  $XAB$  и  $XA_1B_1$  получаются друг из друга поворотной гомотетией с центром в  $X$ . Тогда и два треугольника  $XAA_1$  и  $XBB_1$  получаются друг из друга поворотной гомотетией с тем же центром.

### Задачи

3. **Поворотная гомотетия и окружности.** Две окружности с центрами  $P$  и  $Q$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Некоторая прямая, проходящая через  $A$ , вторично пересекает окружности в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Докажите, что:
  - а) треугольники  $BPQ$  и  $BCD$  подобны;
  - б) поворотная гомотетия с центром  $B$ , переводящая  $C$  в  $D$ , заодно переводит и первую окружность во вторую;
  - в) любая точка, лежащая на первой окружности, её образ и точка  $A$  коллинеарны.
4. Пользуясь предыдущей задачей, расскажите, как построить центр поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок  $\overrightarrow{CD}$  в  $\overrightarrow{C_1D_1}$ .
5. Треугольник  $ABC$  перевели поворотом в треугольник  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что середины отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  либо образуют треугольник, подобный треугольнику  $ABC$ , либо совпадают.
6. Квадраты  $ABCD$  и  $AXYZ$  одинаково ориентированы. Докажите, что прямые  $BX$ ,  $CY$  и  $DZ$  пересекаются в одной точке.
7. Две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а хорды  $AM$  и  $AN$  касаются этих окружностей. Треугольник  $MAN$  достроен до параллелограмма  $MANC$ . Пусть  $P$  – середина отрезка  $BN$ , а  $Q$  – середина отрезка  $MC$ . Докажите, что  $\angle APQ = \angle ANC$ .
8. На диагонали  $BD$  вписанного четырёхугольника  $ABCD$  выбрана такая точка  $K$ , что  $\angle AKB = \angle ADC$ . Пусть  $I$  и  $I'$  – центры вписанных окружностей треугольников  $ACD$  и  $ABK$  соответственно. Отрезки  $II'$  и  $BD$  пересекаются в точке  $X$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $X$ ,  $I$ ,  $D$  лежат на одной окружности.
9. **Точка Микеля.** Дан выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $P$ , лучи  $BA$  и  $CD$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что:
  - а) Описанные окружности треугольников  $ABP$ ,  $CDP$ ,  $BCQ$ ,  $ADQ$  имеют общую точку  $M$  (точка Микеля).
  - б) Докажите, что центры окружностей из пункта А, а также точка  $M$  лежат на одной

окружности.

- в) Докажите, что основания перпендикуляров из точки Микеля на стороны четырёхсторонника лежат на одной прямой.
- г) Докажите, что прямая из пункта в) перпендикулярна прямой Гаусса, проходящей через середины  $AC$ ,  $BD$  и  $PQ$ .
- д) Докажите, что если  $ABCD$  вписан, то  $M$  лежит на прямой  $PQ$ .
- е) Докажите, что если  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ , то четырехугольники  $MDOV$  и  $MAOC$  вписаны, а  $MO$  – общая биссектриса углов  $BOD$  и  $AOC$ .
- ж) Докажите, что если  $ABCD$  вписан, а его диагонали пересекаются в точке  $R$ , то  $OR$  перпендикулярно  $PQ$ .